

Varianta 057

Subiectul I

a) $z = (1+i)^4 = (1-1+2i)^2 = -4 \Rightarrow \text{real } z = -4$

b) $AC = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

c) $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) Formăm sistemul $\begin{cases} 1-2a+b=0 \\ 1-3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$

e) Aria cerută este $\frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ adică $\frac{1}{2}$

f) Notând cu x cateta, obținem $2x^2 = 72 \Rightarrow x = 6$; deci aria este $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$

b) $\frac{C_6^2}{C_6^4} = \frac{C_6^2}{C_6^2} = 1$

c) Cu $x > 0$, ecuația devine $x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

d) $9^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^x \Leftrightarrow x = 0$

e) Deoarece numai 3, 4 și 5 verifică, inegalitatea, probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

2.

a) $f'(x) = 2x + \cos x (\forall) x \in \mathbf{R}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} + 1$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x) - \cos x}{f(x) - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$

e) Ecuația devine $2x + \cos x + x^2 + \sin x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -2$

Subiectul III

a) Fie $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow \overline{\bar{z}} = a + bi = z$

b) Fie $z = a + bi, w = c + di; a, b, c, d \in \mathbf{R}; z + w = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \overline{z} + \overline{w}$$

$$c) z \cdot w = (ac-bd) + (ad+bc)i \Rightarrow \overline{z \cdot w} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (ad+bc)i \text{ și se vede egalitatea } \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$d) f(i) + f(2i) + f(3i) = 4i + i + 8i + 2i + 12i + 3i = 30i$$

e) Se verifică prin calcul direct

$$f) (f \circ f)(z) = f(f(z)) = 4f(z) - \overline{f(z)} = 16z - 4\overline{z} - 4\overline{z} + z = 17z - 8\overline{z} = \frac{5^2+3^2}{2}z - \frac{5^2-3^2}{2}\overline{z}$$

g) Pentru $n=1$ se verifică, pentru $n=2$ se aplică e);

$$\text{Presupun } \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(z)}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{5^n+3^n}{2}z - \frac{5^n-3^n}{2}\overline{z} \text{ și am } \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(z)}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} =$$

$$\underbrace{f((f \circ f \circ \dots \circ f)(z))}_{\text{de } n \text{ ori}} = f\left(\frac{5^n+3^n}{2}z - \frac{5^n-3^n}{2}\overline{z}\right) = 4\frac{5^n+3^n}{2}z - 4\frac{5^n-3^n}{2}\overline{z} -$$

$$-\frac{5^n+3^n}{2}z + \frac{5^n-3^n}{2}\overline{z} = \frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{2}z - \frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{2}\overline{z}$$

Subiectul IV

$$a) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} (\forall) x > 0$$

$$b) f'(e) = 0; f(e) = \frac{e+1}{e}$$

$$c) f'(x) \geq 0 (\forall) x \in (0; e] \Rightarrow f \text{ e crescătoare pe } (0; e]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \text{ (am aplicat l'Hopital)}$$

$$e) \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx = x \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e (\ln^2 x)' dx = e - 1 + \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = e - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= e - \frac{1}{2}$$

$$f) ef(x) \leq 1+e \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1+e}{e} (\forall) x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow f(x) \leq f(e) (\forall) x \in (0, +\infty) \text{ deoarece}$$

$x=e$ este punct de maxim global pentru f

$$g) \text{ Folosind punctul f) am } f(x) \leq \frac{1+e}{e} (\forall) x \in (0, +\infty) \text{ cu egalitatea pentru } x=e; \text{ deci}$$

$$f(x) + f(y) = 2 \cdot \frac{1+e}{e} \Leftrightarrow x = y = e$$